

Abstracte algebraïsche systemen.

Voordracht door W. Peremans in de serie actualiteiten, 28 Mei 1949.

Inleiding.

De abstracte algebra is oorspronkelijk ontstaan uit een axiomatisering van de operaties der klassieke algebra. Zo ontstonden de lichaamstheorie, de ringtheorie en de groepentheorie. Deze axiomatisering geschiedde enerzijds uit overwegingen van stijlzuiverheid: doordat in de axioma's vastgelegd wordt, wat als "algebraïsch" beschouwd mag worden, worden de bewijsvoeringen van eventuele "niet-algebraïsche" redeneringen bevrijd en wordt tevens bepaald, welke resultaten wel en welke niet tot de algebra gerekend mogen worden; anderzijds echter ter generalisatie: de theorie geldt voor ieder systeem, dat aan de axioma's voldoet en niet alleen voor de getalsystemen, waarop van ouds de algebra werd toegepast. Het stelsel, dat het meest aansluit bij de klassieke algebra is dat van de lichaamsaxioma's.

Langzamerhand is men de algebra steeds verder gaan uitbreiden en generaliseren. Hierbij vallen nu twee principieel verschillende richtingen te onderscheiden: 1° Aan de begrippen van een bekend systeem worden nieuwe begrippen met bijbehorende axioma's toegevoegd. Hierdoor worden begrippen en resultaten "algebraïsch" gemaakt, die dat voordien niet waren. Bekende voorbeelden zijn de invoering der begrippen "ordening" en "waardering" in de lichaamstheorie, waardoor perfectisering en limieten hun intree in de algebra deden. 2° Het axiomastelsel van een bekend systeem wordt ingekrompen of verzwakt en daardoor de klasse van beschouwde systemen vergroot. Onder deze categorie vallen natuurlijk, als men uitgaat van de lichaamstheorie, de ring- en groepentheorie, maar er zijn legio andere voorbeelden. Een hierbij vaak optredende methode is, dat men bekende resultaten uit een of andere theorie probeert te behouden (eventueel na enige wijziging) in een systeem met zwakkere condities. Een bekend voorbeeld hiervan is de structuurtheorie van Wedderburn (10) voor hypercomplexe systemen, die verruimd werd tot een structuurtheorie voor ringen met zekere bijcondities, waarbij deze laatste langzamerhand steeds verder zijn verzwakt.

We zullen ons hier tot het geval 2° beperken en wel zullen we twee voorbeelden behandelen van bekende stellingen uit de elementaire groepentheorie, die geldig blijven in meer omvattende systemen.

Dit is ten eerste de theorie van de homomorfie en de normale ondergroepen met de stellingen die samenhangen met die van Jordan-Hölder, en ten tweede de theorie der directe producten met als doel de stellingen van Remak-Schmidt. Als inleiding daartoe geven we eerst enkele beschouwingen over een dusdanig begrip algebraïsch systeem als voor onze doeleinden het meest praktisch is.

§ 1. Algemene begrippen en eigenschappen.

Een Griekse letter stelt een eindig of transfinitief ordegetal voor. Een op een verzameling gedefinieerde τ -aire operator $O(a_0, a_1, \dots, a_\sigma, \dots)$, $\sigma < \tau$ is een functie die aan een willekeurige rij van τ niet noodzakelijk verschillende elementen uit de verzameling een element van die verzameling toevoegt.

Een formule gevormd uit zekere operatoren $O_0, O_1, \dots, O_\xi, \dots$, $\xi < \mu$ van een verzameling V wordt bepaald door de volgende eisen:

- 1° de elementen van V zijn formules;
- 2° als $L_0, L_1, \dots, L_\sigma, \dots$, $\sigma < \tau(\xi)$ formules zijn, dan is ook $O_\xi(L_0, L_1, \dots, L_\sigma, \dots)$ een formule;
- 3° de verzameling der formules is de kleinste die aan 1° en 2° voldoet.

In een formule komen dus slechts eindig veel operatoren voor!

Een algebra is een verzameling, waarin bepaalde elementen als vaste elementen $e_0, e_1, \dots, e_\lambda, \dots$ ($\lambda < \nu$) uitgezonderd zijn, en waarbij en stel operatoren O_ξ ($\xi < \mu$) gegeven is, zo dat voldaan is aan een stelsel axioma's $A_0, A_1, \dots, A_\rho, \dots$ ($\rho < \pi$), die de vorm hebben van gelijkheden van formules, waarbij in de operatoren, die in die formules optreden als argumenten deels veranderlijken, deels vaste elementen van de algebra staan. We zeggen dat aan een axioma voldaan is, als bij iedere willekeurige substitutie van elementen van de algebra voor de veranderlijken de gelijkheid tussen twee elementen der algebra, die zo ontstaat, vervuld is.

Deze definitie lijkt zeer algemeen, maar door de eis dat een operator voor alle argumentwaarden in de algebra gedefinieerd moet zijn en dat de axioma's de vorm van gelijkheden moeten hebben, voldoen de gewone lichaamsaxioma's niet aan bovenstaande eisen (uitzonderingspositie van de nul bij deling).

Een deelverzameling B van een algebra A heet een deelalgebra (of subalgebra) als de verzameling een algebra is t.o.v. de zelfde operatoren als A . Noodzakelijk en voldoende daervoor is, dat de vaste elementen tot B behoren en met een aantal elementen ook het operatorbeeld. In formule uitgedrukt:

$$e_\lambda \in B$$

$$a, b, \dots \in B \rightarrow O_\xi(a, b, \dots) \in B$$

De geldigheid der axioma's volgt uit die in A.

We beschouwen nu een systeem met één binaire operator $P(a,b)=ab$ (product) en stellen de volgende eisen:

$$I \quad (ab) c = a (bc)$$

II $ax = b, ya = b$ bezitten één en slechts één oplossing.

Een systeem dat aan I voldoet, heet een halfgroep (of semigroep), één dat aan II voldoet een quasigroep; één dat aan I en II voldoet een groep. De eis I is een axioma in bovenvermelde zin; we tonen nu aan dat II vervangen kan worden door een stelsel dergelijke axioma's. We noemen de oplossing van $P(a,x)=b$: $Dr(a,b)$ (rechtsdeling) en van $P(y,a)=b$: $Dl(b,a)$ (linksdeling). Dat het een oplossing is, betekent: $P(a, Dr(a,b))=b$ en $P(Dl(b,a), a)=b$. Omdat de oplossing eenduidig is, volgt uit $P(a,b)=P(a, Dr(a, P(a,b)))$, dat $b = Dr(a, P(a,b))$ is en evenzo blijkt $b = Dl(P(b,a), a)$. We stellen nu de volgende vier axioma's op:

$$(A): \quad P(a, Dr(a,b))=b$$

$$(B): \quad P(Dl(b,a), a)=b$$

$$(C): \quad Dr(a, P(a,b))=b$$

$$(D): \quad Dl(P(b,a), a)=b$$

Nu zijn (A) - (D) equivalent met II. Dat uit II het stelsel (A)-(D) volgt, zagen we al. Neem nu aan, dat (A)-(D) vervuld is. Dat $P(a,x)=b$ oplosbaar is, is duidelijk, want volgens (A) voldoet $Dr(a,b)$. Dat er slechts één oplossing is, bewijst men als volgt: stel dat $P(a,c)=b$, dan is volgens (C):

$$Dr(a,b)=Dr(a, P(a,c))=c.$$

Evenzo behandelt men $P(y,a)=b$.

In een algebra A met een binaire operator P heet een eventuele oplossing van $P(a,x)=a$ een rechtseenheid, van $P(y,a)=a$ een linkseenheid. Als er een gemeenschappelijke oplossing is voor alle vergelijkingen $P(a,x)=a$ met willekeurige $a \in A$, dan heet deze een rechtséén en analoog een linkséén. Een element, dat zowel links- als rechtséén is, heet een één. Al deze begrippen zijn ten opzichte van de operator P.

In een quasigroep behoort bij iedere a één en slechts één rechtseenheid en evenzo linkseenheid. Er is dus hoogstens één rechtséén (evenzo linkséén). Bevat een quasigroep zowel linkséén als rechtséén, dan zijn deze aan elkaar gelijk:

$$\left. \begin{array}{l} ax = a \text{ voor alle } a, \text{ dus } yx = x \\ ya = a \text{ " " " } a, \text{ " } yx = y \end{array} \right\} \rightarrow x = y.$$

Dit is dus de één. Een quasigroep met één heet in de Amerikaanse literatuur een "loop" (letterlijk: lus).

Voor de voorwaarde II bestaat nog een wijze van uitdrukking, die in sommige gevallen zekere voordelen biedt. Definieer functies $f_a(x)$ en $g_a(x)$ door de definities:

$$\begin{aligned} f_a(x) &= a x \\ g_a(x) &= x a, \end{aligned}$$

dan is voorwaarde II juist equivalent met de bewering, dat deze functies eeneenduidige afbeeldingen van de verzameling op zichzelf zijn.

We leiden nog eens (A)-(D) uit deze eis van eeneenduidigheid op af, omdat dit voor de axioma's (C) en (D) misschien een natuurlijker afleiding geeft,

Gegeven is dus dat

$$\begin{aligned} f_a(x) &= P(a, x) \\ g_a(x) &= P(x, a) \end{aligned}$$

eeneenduidige afbeeldingen op zijn. Uit op alleen volgt dat ieder element b beeld van f_a is, dat er dus bij b een origineel te vinden is. Doet men voor iedere b een keuze dan ontstaat een functie $f_a^{-1}(x) = Dr(a, x)$. Blijkbaar is dan:

$$f_a f_a^{-1}(b) = b$$

$$\text{of} \quad P(a, Dr(a, b)) = b. \text{ Dit is (A).}$$

Uit de eeneenduidigheid volgt nu ook omgekeerd:

$$f_a^{-1} f_a(b) = b$$

$$\text{of} \quad Dr(a, P(a, b)) = b. \text{ Dit is (C)}$$

Aanaloog voor (B) en (D). De afleiding toont duidelijk de betekenis van de symmetrie van de formules (A) en (C) (resp. (B) en (D)).

§ 2. Homomorfie.

Een homomorfie is een afbeelding van een algebra A op een andere algebra A' : $a' = \theta(a)$, zodat met de vaste elementen van A de overeenkomstige vaste elementen van A' corresponderen en het beeld van een operator gelijk is aan de overeenkomstige operator uitgeoefend op de beelden:

$$e'_\lambda = \theta(e_\lambda)$$

$$\theta'_\xi(\theta(a), \dots) = \theta(\theta_\xi(a, \dots))$$

Een eeneenduidige homomorfie heet een isomorfie.

Met een homomorfie $A \rightarrow A'$ correspondeert (zoals trouwens met iedere afbeelding) een klasse-indeling van A , n.l. in klassen van

elementen, die hetzelfde beeld hebben: $a \equiv b$, als $\vartheta(a) = \vartheta(b)$ (reflexiviteit, symmetrie en transitiviteit volgen uit de overeenkomstige eigenschappen van de gelijkheid in A'). We noemen de klassen $K(a)$, dat is de klasse die a bevat. Dus $K(a) = K(b)$, als $\vartheta(a) = \vartheta(b)$. We kunnen nu de verzameling der klassen weer tot een algebra maken door de volgende definities van vaste elementen E_λ en operatoren O_ξ :

$$E_\lambda = K(e_\lambda)$$

$$O_\xi(K(a), \dots) = K(O_\xi(a, \dots))$$

De definitie van de vaste elementen is gerechtvaardigd omdat bij verschillende e_λ en $e_{\lambda'}$ ook verschillende klassen behoren (verschillende elementen in A'), en die van de operatoren, omdat als $K(a) = K(\bar{a}), \dots$, d.w.z. $\vartheta(a) = \vartheta(\bar{a}), \dots$ dan geldt:

$$\vartheta(O_\xi(a, \dots)) = O'_\xi(\vartheta(a), \dots) = O'_\xi(\vartheta(\bar{a}), \dots) = \vartheta(O_\xi(\bar{a}, \dots))$$

dus

$$K(O_\xi(a, \dots)) = K(O_\xi(\bar{a}, \dots)),$$

en de definitie is onafhankelijk van de keuze van de elementen in de klassen. Aan de axioma's van een algebra is nu ook voldaan. Laat een axioma zijn:

$$O_\xi(O_\eta \dots (a, \dots) \dots) = O_\xi(\dots (b, \dots) \dots)$$

met eindig veel operatoren, dan is door inductie in te zien, dat geldt:

$$O_\xi(O_\eta \dots (K(a), \dots) \dots) = K(O_\xi(O_\eta \dots (a, \dots) \dots))$$

$$\text{en } O_\xi(\dots (K(b), \dots) \dots) = K(O_\xi(\dots (b, \dots) \dots)).$$

En dus is:

$$O_\xi(O_\eta \dots (K(a), \dots) \dots) = O_\xi(\dots (K(b), \dots) \dots).$$

Als in het oorspronkelijke axioma ergens een e_λ optreedt, komt in het nieuwe axioma automatisch op dezelfde plaats E_λ te staan.

Nu is deze nieuwe algebra $K(A)$ isomorf met A' op grond van de afbeelding θ , met de definitie:

$$\theta(K(a)) = \vartheta(a).$$

Deze definitie is gerechtvaardigd, want als $K(a) = K(\bar{a})$ is, is

$$\vartheta(a) = \vartheta(\bar{a}), \text{ dus}$$

$$\theta(K(a)) = \theta(K(\bar{a}))$$

Verder is

$$e_\lambda = \vartheta(e_\lambda) = \theta(K(e_\lambda)) = \theta(E_\lambda)$$

$$\text{en } O_{\xi} (\theta (K(a)), \dots) = O_{\xi} (\mathcal{A}(a), \dots) = \mathcal{A}(O_{\xi}(a, \dots)) = \theta (K(O_{\xi}(a, \dots))) = \\ = \theta (O_{\xi} (K(a), \dots)).$$

Tenslotte is de afbeelding θ eeneenduidig, want uit:

$$\begin{aligned} \theta (K(a)) &= \theta (K(b)) \\ \text{volgt } \mathcal{A}(a) &= \mathcal{A}(b) \\ \text{en } K(a) &= K(b), \end{aligned}$$

Daar ieder homomorf beeld van A dus isomorf is met een klasse-indelingsalgebra $K(A)$ van A , kunnen we ons tot de laatste beperken en voor de homomorfietheorie slechts één algebra A gebruiken. De afbeelding is dan $a \rightarrow K(a)$.

Nu is omgekeerd de vraag, welke klasse-indelingen tot een met A homomorfe algebra aanleiding geven. Gegeven is dus een klasse-indeling $K(a)$; vorm de afbeelding $\mathcal{A}(a) = K(a)$. Er moeten dus operatoren voor $K(a)$ kunnen gedefinieerd worden volgens de formule:

$$O_{\xi} (K(a), \dots) = K(O_{\xi}(a, \dots)).$$

Noodzakelijk hiervoor is, dat uit $K(a) = K(b)$ volgt: $K(O_{\xi}(a, \dots)) = K(O_{\xi}(b, \dots))$, d.w.z. als men in een operator de argumenten telkens vervangt door elementen uit eenzelfde klasse, dan blijft het resultaat ook in dezelfde klasse. Dit is echter ook voldoende, mits de $E_{\lambda} = K(e_{\lambda})$ alle verschillend zijn. Aan de axioma's is voldaan, want door eindig vaak toepassen van de definitie vindt men voor formules:

$$\begin{aligned} O_{\xi} (\dots (K(a), \dots) \dots) &= K(O_{\xi} (\dots (a, \dots) \dots)) \\ O_{\xi} (\dots (K(b), \dots) \dots) &= K(O_{\xi} (\dots (b, \dots) \dots)) \end{aligned}$$

Als dus

$$O_{\xi} (\dots (a, \dots) \dots) = O_{\xi} (\dots (b, \dots) \dots)$$

$$\text{dan is } K(O_{\xi} (\dots (a, \dots) \dots)) = K(O_{\xi} (\dots (b, \dots) \dots))$$

en dus

$$O_{\xi} (\dots (K(a), \dots) \dots) = O_{\xi} (\dots (K(b), \dots) \dots).$$

Verder is de afbeelding een homomorfie, want:

$$O_{\xi} (\mathcal{A}(a), \dots) = O_{\xi} (K(a), \dots) = K(O_{\xi}(a, \dots)) = \mathcal{A}(O_{\xi}(a, \dots))$$

$$\text{en } E_{\lambda} = K(e_{\lambda}) = \mathcal{A}(e_{\lambda}).$$

De stellingen van de groepentheorie over homomorfie berusten op de begrippen normale ondergroep en nevenklasse d.w.z. de klasse-indeling van een groep G is zo, dat één der klassen een ondergroep $\mathcal{H}$ is en een willekeurige klasse $K(a)$ kan worden voorgesteld als $a\mathcal{H}$ (de verzameling der elementen ah met $h \in \mathcal{H}$) of als $\mathcal{H}a$.

We stellen nu aan de algebra A eerst de eis, dat iedere klasse-indelingsalgebra een klasse bevat, die deelalgebra is. Nu is speciaal de identieke afbeelding een homomorfie; de bijbehorende klasse-indeling is die waarbij iedere klasse één element bevat. Voor deze klasse-indeling luidt de eis dus, dat de algebra een deelalgebra bevat, die uit één element bestaat. Noemen we dit element e , dan betekent dit volgens de eis voor een deelalgebra:

$$O_{\xi}(e, e, \dots, e, \dots) = e$$

d.w.z. e is idempotent t.o.v. alle operatoren.

Deze eis is nu echter ook voldoende. Stel dat de algebra één en slechts één vast element e_0 bevat en verder o.m. de volgende axioma's:

$$O_{\xi}(e_0, e_0, \dots, e_0, \dots) = e_0 \quad \xi < \omega$$

(Het is niet strikt noodzakelijk, dat deze gelijkheden onder de axioma's voorkomen, als ze maar uit de axioma's afgeleid kunnen worden), dan bevat iedere bij een homomorfie behorende klasse-indeling een klasse, die deelalgebra is en wel de klasse $K(e_0)$, die het element e_0 bevat. Hiervoor geldt:

$$O_{\xi}(K(e_0), K(e_0), \dots, K(e_0), \dots) = K(O_{\xi}(e_0, e_0, \dots, e_0, \dots)) = K(e_0)$$

en de klasse $K(e_0)$ is inderdaad idempotent.

We noemen een deelalgebra N , die als $K(e_0)$ bij een homomorfie kan optreden, een normale deelalgebra. Ook noemen we N wel de kern van de homomorfie en de klasse-indelingsalgebra die bij N hoort de factoralgebra A/N .

Aan de eisen van een algebra met geen of één vast element is steeds te voldoen door een uit één element e bestaande algebra E (dat element is dan eventueel tevens het vaste element), als we vaststellen dat e idempotent is t.o.v. alle operatoren. Ieder axioma krijgt dan nl. de vorm $e = e$. Bovendien is E steeds homomorf beeld van een willekeurige dergelijke algebra, op grond van de afbeelding $\mathcal{A}(a) = e$. Immers eventueel is

$$e = \mathcal{A}(e_0)$$

en steeds is $O'_{\xi}(\mathcal{A}(a), \dots) = O'_{\xi}(e, e, \dots, e, \dots) = e = \mathcal{A}(O_{\xi}(a, \dots))$

De bijbehorende klasse-indeling is die, waarbij A voor zichzelf één klasse vormt.

Om nu de analogie met de groepentheorie voort te kunnen zetten nemen we aan, dat er onder de operatoren een binaire operator $P(a, b)$ voorkomt. Als nu voor iedere homomorfie van A met klasse-

indeling $K(a)$ en kern $N = K(e_0)$ geldt, dat $K(a) = P(a, N) = P(N, a)$ (we verstaan onder $P(a, N)$ weer de verzameling van alle $P(a, n)$ met $n \in N$ en analoog in alle andere dergelijke gevallen), dan kunnen we dit allereerst toepassen op de identieke isomorfie, waarbij $N = e_0$ is. Dan wordt het:

$$a = P(a, e_0) = P(e_0, a)$$

dus het vaste element e_0 is één t.o.v. P .

Nemen we nu de homomorfe afbeelding op E , waarbij $N = A$ is, dan wordt het

$$A = P(a, A) = P(A, a)$$

d.w.z. de functies

$$f_a(x) = P(a, x)$$

$$g_a(x) = P(x, a)$$

zijn afbeeldingen van A op zichzelf voor iedere $a \in A$.

Deze voorwaarden zijn dus noodzakelijk. Het aangeven van noodzakelijke en voldoende voorwaarden is niet eenvoudig (zie voor kwesties die met deze verwant zijn: Bruck (4), Hausmann & Ore (5), Murdoch (7)). Voldoende is echter in ieder geval dat $f_a(x)$ en $g_a(x)$ eeneenduidig zijn, d.w.z. dat er operatoren $Dr(a, b)$ en $Dl(a, b)$ bestaan, die aan de eisen (A) - (D) uit § 1 voldoen.

De homomorfie-eis is voor deze beide operatoren automatisch vervuld, als hij voor P vervuld is, immers als $a \rightarrow a'$, $b \rightarrow b'$, $c \rightarrow c'$ en $Dr(a, b) = c$, d.w.z. $P(a, c) = b$, dan volgt daaruit $P(a', c') = b'$ en dan ook $Dr(a', b') = Dr(a', P(a', c')) = c'$. Evenzo voor Dl .

Nu geldt in ieder geval voor de verzameling $L = P(a, N)$ dat $L \subset K(a)$. Dus:

$$N = Dr(a, P(a, N)) = Dr(a, L) \subset Dr(a, K(a))$$

Het laatste lid ligt in één klasse, die blijkbaar N moet zijn (inderdaad is $Dr(a, a) = e_0$). Dus is

$$Dr(a, L) = Dr(a, K(a))$$

$$P(a, Dr(a, L)) = P(a, Dr(a, K(a)))$$

$$L = K(a) .$$

Evenzo voor $P(N, a)$.

Zo zijn we gekomen tot de theorie van een loop met operatoren. Hiervoor kunnen de bekende homomorfie-eigenschappen van de groepentheorie, die leiden tot de stellingen van Jordan-Hölder met de generalisaties van Schreier en Zassenhaus (zie Zassenhaus (11)) afgeleid worden. Dit is te vinden bij Albert (2) en Baer (3). Baer

sluit zich nauw aan bij het groepentheoretische bewijs. Zijn grondgedachte is, steeds de normale deelloops te karakteriseren als kernen van homomorfieën, en geen gebruik te maken van de in de groepentheorie gebruikelijke karakterisering: $aN = Na$ (Hij wijkt op één plaats van dit door hem zelf geformuleerde principe af, n.l. in zijn lemma 1 van § 2; dat is echter heel eenvoudig te verhelpen). Op die wijze lukt het op verrassend eenvoudige wijze het gebruik van de associatieve eigenschap te vermijden. Om een idee te geven van de gedachtengang reproduceren we het bewijs van de eerste isomorfiestelling.

Allereerst een algemene opmerking over algebra's. De doorsnede van willekeurig veel deelalgebra's van een algebra A is weer een algebra. Neemt men een willekeurige deelverzameling V van een algebra A dan is de verzameling van de deelalgebra's die V bevatten niet leeg (immers A bevat V), en de doorsnede daarvan is weer een deelalgebra: de kleinste deelalgebra die V bevat. We noemen deze de door V voortgebrachte algebra $\{V\}$.

Hulpstelling: Als S een normale deelloop van een loop L is en T een deelloop van L dan is $S \cap T$ een normale deelloop van T .

Bewijs: Er is een homomorfie θ van L met S als kern. Past men deze toe op T , dan is de kern $S \cap T$.

Stelling: Als de loop L voortgebracht wordt door de deelloop S en T : $L = \{S, T\}$ en S is normaal in L , dan is $\{S, T\} = P(S, T)$ en $P(S, T)/S$ is isomorf met $T/S \cap T$.

Bewijs: Beschouw een homomorfie θ van L met S als kern, dan is blijkbaar $\theta L = \theta\{S, T\} = \{\theta S, \theta T\} = \theta T$; dan bij iedere $x \in L$ is een $t \in T$, zodat $\theta x = \theta t$, dus is $x = P(s, t)$ dus

maar uiteraard is

$$\left. \begin{array}{l} L \subset P(S, T) \\ P(S, T) \subset L \end{array} \right\} \text{ dus } L = P(S, T).$$

Dat $S \cap T$ normaal is in T volgt uit de hulpstelling. L en T hebben hetzelfde homomorfe beeld $J = \theta L = \theta T$ t.o.v. θ en kernen resp. S en $S \cap T$. Hieruit volgt dat J isomorf is zowel met $P(S, T)/S$ als met $T/S \cap T$; deze zijn dus ook onderling isomorf.

De behandeling bij Albert (2) berust op een heel andere gedachte, die interessant genoeg is om hier in het kort weergegeven te worden.

Bij een willekeurige verzameling V vormen alle eeneenduidige afbeeldingen van V op zichzelf (permutaties van V) een groep G , als men het product van twee permutaties definieert als de permutatie, die ontstaat door de twee permutaties na elkaar uit te voeren.

Neemt men nu als verzameling een quasigroep L , dan zijn de afbeeldingen $f_a(x) = P(a, x)$ en $g_a(x) = P(x, a)$ permutaties. Deze brengen een ondergroep $\mathcal{H}$ van G voort. In het geval dat L een loop is, is deze verwantschap tussen L en $\mathcal{H}$ zeer vruchtbaar, omdat er een correspondentie bestaat tussen de normale deelloops van L en de normale ondergroepen van $\mathcal{H}$, op grond van de volgende stelling (zie Albert (1)):

Iedere normale deelloop van een loop is de beeldverzameling van e t.o.v. een normale ondergroep $\mathcal{H}$ van $\mathcal{H}$ en omgekeerd.

Met behulp hiervan kan het onderzoek tot dat van groepen teruggebracht worden. Het enige nadeel is, dat de groepentheorie voorondersteld wordt, hetgeen bij Baer niet het geval is.

§ 2. Directe producten.

Onder een (uitwendig) direct product $A \times B$ van twee algebra's A (met vaste elementen e'_λ en operatoren O'_ξ) en B (met vaste elementen e''_λ en operatoren O''_ξ) verstaan we de verzameling van de geordende paren:

$$(a, b) \text{ met } a \in A, b \in B,$$

met als vaste elementen $e''_{\lambda''} = (e'_\lambda, e''_\lambda)$

en als operatoren $O''_{\xi''}((a_0, b_0), (a_1, b_1), \dots) = (O'_\xi(a_0, a_1, \dots), O''_\xi(b_0, b_1, \dots)).$

Het is duidelijk dat $A \times B$ dan ook een algebra is, d.w.z. aan dezelfde axioma's voldoet. In de groepentheorie correspondeert met dit directe product een opbouw van het product uit zijn ^{directe} factoren, met dien verstande, dat $A \times B$ ondergroepen $\bar{A}$ en $\bar{B}$ bevat die isomorf zijn met resp. A en B op grond van de toevoeging resp. $a \rightarrow (a, e)$ en $b \rightarrow (e, b)$, zodanig dat ieder element van $A \times B$ eenduidig te schrijven is als product van een element van $\bar{A}$ en één van $\bar{B}$ op grond van de relatie $(a, b) = (a, e)(e, b)$.

Laten we dit proberen over te brengen op een algebra A . Stel dat voor een vast element e'' van B de verzameling $(a, e'')(a \in A)$ een deelalgebra is, dan volgt uit:

$$O''_{\xi''}((a_0, e''), (a_1, e''), \dots) = (O'_\xi(a_0, a_1, \dots), O''_\xi(e'', e'', \dots))$$

dat $O''_\xi(e'', e'', \dots) = e''$ is; dus e'' is idempotent. Evenzo een idempotent element e' in A . Verder nemen we in overeenstemming met de groepentheorie het bestaan aan van een binaire operator $P(a, b)$, zo dat

$$(a, b) = P((a, e''), (e', b)) = (P(a, e'), P(e'', b))$$

$$\text{dus } a = P(a, e')$$

$$b = P(e'', b)$$

We moeten dus van het idempotente element e eisen dat het één t.o.v. P is. Deze eisen die noodzakelijk zijn om het uit de groepentheorie bekende begrip direct product te kunnen definiëren zijn nu echter ook voldoende om de uit de elementaire groepentheorie bekende stellingen over directe producten inclusief de stellingen van Remak en Schmidt (zie Remak (8) en Schmidt (9)) te bewijzen. De algebra bevat dus o.m. een vast element e , en o.m. een operator $P(a,b)$ en o.m. de volgende axioma's:

$$P(a,e) = a$$

$$P(e,a) = a$$

$$O_{\xi}(e,e,\dots,e,\dots) = e$$

(of deze gelijkheden zijn uit de axioma's af te leiden).

We kunnen dan een begrip "inwendig direct product" als volgt definiëren (zie Jónsson & Tarski (6)):

A heet het inwendige directe product van twee deelalgebra's B en C als voor iedere $a \in A$ geldt:

$$a = P(b,c) \text{ met } b \in B, c \in C$$

en er verder geldt:

als $b_1, b_2 \in B; c_1, c_2 \in C$ en $P(b_1, c_1) = P(b_2, c_2)$, dan is:

$$b_1 = b_2 \text{ en } c_1 = c_2;$$

als $b_1, b_2 \in B; c_1, c_2 \in C$, dan is:

$$P(P(b_1, c_1), P(b_2, c_2)) = P(P(b_1, b_2), P(c_1, c_2));$$

als $b_0, b_1, \dots \in B$ en $c_0, c_1, \dots \in C$, dan is:

$$O_{\xi}(P(b_0, c_0), P(b_1, c_1), \dots) = P(O_{\xi}(b_0, b_1, \dots), O_{\xi}(c_0, c_1, \dots)).$$

Het uitwendige directe product wordt gedefinieerd door paarvorming als boven.

Nu geldt echter de volgende

Stelling: Als A, B en C algebra's zijn (A met enkelvoudig, B met dubbel en C met drievoudig geaccentueerde operatoren), dan is nodig en voldoende opdat A isomorf is met $B \times C$ (uitwendig direct product), dat er deelalgebra's $\bar{B}$ en $\bar{C}$ van A bestaan, zodat A inwendig direct product van $\bar{B}$ en $\bar{C}$ is en $\bar{B}$ isomorf B en $\bar{C}$ isomorf C is.

Bewijs: 1° Noodzakelijk: Laat A isomorf $B \times C$ zijn. Beschouw dan de isomorfe afbeelding $\mathcal{A}$ van $B \times C$ op A en de deelverzamelingen $\bar{B}$ van A bestaande uit $\mathcal{A}(b'', e''')$ (b'' willekeurig in B) en $\bar{C}$ bestaande uit $\mathcal{A}(e'', c''')$ (c''' willekeurig in C). Dat $\bar{B}$ en $\bar{C}$ deelalgebra's van A zijn, dat A inwendig direct product van $\bar{B}$ en $\bar{C}$ is en dat $\bar{B}$ isomorf met B en $\bar{C}$ isomorf met C is, is zeer eenvoudig te bewijzen.

2°. Voldoende. Nu is gegeven dat A inwendig direct product van B en C is en dat B isomorf met B en C isomorf met C is. Vormt men nu het uitwendige directe product van B en C , dan is eenvoudig te bewijzen dat A daarmee isomorf is, en dus is A ook isomorf met het uitwendige directe product $B \times C$ van B en C .

Hiervan uitgaande kan nu de theorie verder opgebouwd worden (zie Jónsson & Tarski(6)). De opbouw is echter wel nog essentieel gecompliceerder dan in de groepentheorie omdat de begrippen centrum en centrale isomorfie, die in de theorie van Remak en Schmidt een zo belangrijke rol spelen, niet onmiddellijk gegeneraliseerd kunnen worden. Het lukt echter toch met wat meer moeite deze begrippen zo te definiëren dat ze voor de directe producten dezelfde plaats kunnen innemen, als ze dat in de groepentheorie deden. Evenals bij de homomorfietheorie is het dan ook hier gelukt de associativiteit geheel uit te schakelen.

LITERATUUR.

- (1) A.A. Albert, Quasigroups I, Trans.Amer.Math.Soc. 54 (1943); p. 507-519/
- (2) A.A. Albert, Quasigroups II, Trans.Amer.Math.Soc., 55 (1944) pag. 401-419.
- (3) R. Baer, The homomorphism theorems for loops, Amer. J. of Math., 67 (1945), pg. 450-460.
- (4) R.H.Bruck, Some results in the theory of quasigroups, Trans. Amer. Math.Soc. 55 (1944) pag. 19-52.
- (5) B.A. Hausmann & O. Ore, Theory of quasigroups, Amer.J. of Math. 59 (1937), pg. 983-1004.
- (6) B. Jónsson & A. Tarski, Direct decompositions of finite algebraic systems, Notre Dame Math. Lect., nr. 5.
- (7) D.C. Murdoch, Note on normality in quasi-groups, Bull. Amer. Math.Soc. 47 (1941), pg. 134-138.
- (8) R. Remak, Über die Zerlegung der endlichen Gruppen, J. für Math. 139 (1910), pg. 293-308.
- (9) O. Schmidt, Über unendliche Gruppen mit endlicher Kette, Math. Z., 29 (1929), pg. 34-41.
- (10) J.H. MacLagan-Wedderburn, On hypercomplex numbers, Proc. London Math.Soc. 6 (1908), pg. 77-118.
- (11) H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie.